

Объединение реверсивно-устойчивых последовательностей

Георгий Гуляев

18 июля 2026 г.

Для натурального числа n через $rev(n)$ - обозначим функцию реверса, то есть натуральное число, в десятичной записи которого цифры следуют в обратном порядке по отношению к n . Например, $rev(231) = 132$, $rev(350) = 53$, $rev(575) = 575$.

Определение 1. Числом - палиндромом называется натуральное число n , для которого выполняется условие $rev(n) = n$.

Множество всех чисел-палиндромов далее будем обозначать через P :

$$P = \{n \in \mathbb{N} : rev(n) = n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, \dots\}$$

В работе [1] было введено понятие реверсивно-устойчивой последовательности и изучено получение таких последовательностей при помощи умножения на коэффициент специального множества двоичных палиндромов.

Определение 2. Последовательность натуральных чисел $S_n = \{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых отношение $\frac{rev(a_n)}{a_n} = \frac{r}{s}$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ - постоянно и не зависит от n называется реверсивно-устойчивой последовательностью. При этом, рациональное число $\frac{r}{s}$, которому равно отношение, будем называть коэффициентом реверсивной устойчивости последовательности.

Рассмотрим функцию $d(n) = \gcd(n, rev(n))$, которая для каждого натурального числа n возвращает наибольший общий делитель чисел n и $rev(n)$.

В данной работе мы изучим множества

$$A_m = \{n = m \cdot k : d(n) = k, \forall k \in \mathbb{N}\} \quad (1)$$

для различных фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и их связь с реверсивно-устойчивыми последовательностями.

1. Случаи $m = 1$ и $m = 2$.

Если взять $m = 1$ в формуле (1), то, из определения $d(n)$:

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : d(n) = n\} = \{n \in \mathbb{N} : rev(n) = q \cdot n, q \in \mathbb{N}\} \quad (2)$$

Очевидно, в A_1 содержатся все палиндромы P ($q = 1$) и, кроме них, еще две известные ([2], [4]) последовательности S_{1089} ($q = 9$) и S_{2178} ($q = 4$):

$$S_{1089} = \{1089, 10989, 109989, 1099989, 10891089, 10999989, 108901089, \dots\}$$

$$S_{2178} = \{2178, 21978, 219978, 2199978, 21782178, 21999978, 217802178, \dots\}$$

Теорема 1. Множество A_1 равно объединению трех непересекающихся реверсивно-устойчивых последовательностей: P , S_{1089} , S_{2178} с коэффициентами реверсивной устойчивости 1, 9, 4 соответственно, то есть

$$A_1 = P \cup S_{1089} \cup S_{2178}$$

Доказательство. Очевидно, уравнение (2) выполняется для последовательностей P , S_{1089} , S_{2178} с $q = 1, 9, 4$, соответственно. Поэтому они содержатся в A_1 и попарно не пересекаются. Осталось показать, что никаких других элементов, кроме элементов этих трех последовательностей в A_1 нет.

Число q в формуле (2) может принимать только значения множества $\{1, 2, \dots, 9\}$, так как, очевидно, длина числа $rev(n)$ не превосходит длины числа n для любого натурального n .

В теореме 1.1 работы [2] подробно разобраны все случаи $q \notin \{1, 4, 9\}$ и доказана невозможность выполнения уравнения $rev(n) = q \cdot n$ в каждом из них. Поэтому мы не будем здесь останавливаться на этом.

Идея доказательства в теореме 1.1 работы [2] состоит в анализе и противопоставлении первой и последней цифры в числах $rev(n)$ и $q \cdot n$ (у n и $rev(n)$ эти цифры меняются местами). И она будет продемонстрирована ниже в доказательстве теоремы 2.

Пусть теперь $m = 2$. Формула (1) в этом случае примет вид:

$$A_2 = \{n = 2 \cdot k : d(n) = k, \forall k \in \mathbb{N}\} \quad (3)$$

Вычисления дают нам следующие начальные элементы множества A_2 :

{18, 198, 1818, 1998, 4356, 18018, 19998, 43956, 180018, 181818, 198198, 199998, 439956, 1800018, 1819818, 1980198, 1999998, 4399956, 18000018, 18018018, 18181818, 18199818, 19800198, 19818198, 19981998, 19999998, 43564356, 43999956, 180000018, 180198018, 181801818, 181999818, 198000198, 198198198, 199801998, 199999998, ...}

Основываясь на этих данных, можно предположить, что множество A_2 является объединением двух непересекающихся реверсивно-устойчивых последовательностей:

$$S_{18} = \{18, 198, 1818, 1998, 18018, 19998, 180018, 181818, 198198, 199998, \dots\}$$

$$S_{4356} = \{4356, 43956, 439956, 4399956, 43564356, 43999956, 435604356, \dots\}$$

Вторая последовательность $S_{4356} = 396 \cdot P91$, где $P91$ - множество 91-стойких двоичных палиндромов из работы [1]:

$P91 = \{11, 111, 1111, 11111, 110011, 111111, 1100011, 1111111, 11000011, 11100111, 11111111, 110000011, 111000111, 111111111, 1100000011, 1100110011, 1110000111, 1111001111, 1111111111, 11000000011, 11001110011, 11100000111, 11110001111, 11111111111, 110000000011, 110001100011, \dots\}$

Для нее коэффициент реверсивной устойчивости равен $\frac{3}{2}$.

Первая же последовательность S_{18} не может быть получена умножением некоего натурального числа на $P91$, но она получается умножением на 18 множества всех двоичных палиндромов:

$P2 = \{1, 11, 101, 111, 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111, 100001, 101101, 110011, 111111, 1000001, 1001001, 1010101, 1011101, 1100011, 1101011, 1110111, 1111111, 10000001, 10011001, 10100101, 10111101, 11000011, 11011011, 11100111, 11111111, \dots\}$

Коэффициент реверсивной устойчивости для последовательности S_{18} равен $\frac{9}{2}$.

Теорема 2. Множество A_2 равно объединению двух непересекающихся реверсивно-устойчивых последовательностей: $S_{18} = 18 \cdot P2$ и $S_{4356} = 396 \cdot P91$ с коэффициентами реверсивной устойчивости $\frac{9}{2}$ и $\frac{3}{2}$ соответственно, то есть

$$A_2 = S_{18} \cup S_{4356}.$$

Доказательство. Пусть множество A_2 задано формулой (3). Требуется доказать, что

$$A_2 = A_{21} \cup A_{22},$$

где

$$A_{21} = \{n \in \mathbb{N} : \frac{rev(n)}{n} = \frac{9}{2}\}, \quad A_{22} = \{n \in \mathbb{N} : \frac{rev(n)}{n} = \frac{3}{2}\},$$

причем $A_{21} = S_{18}$ и $A_{22} = S_{4356}$.

Для любого $n \in A_2$ имеем $n = 2k$ и $\gcd(n, rev(n)) = k$. Отсюда, $rev(n)$ делится на k , то есть

$$rev(n) = q \cdot k, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

При этом, $k = \gcd(n, rev(n)) = \gcd(2k, qk) = k \cdot \gcd(2, q)$, следовательно, $\gcd(2, q) = 1$, то есть q - нечетное.

Далее,

$$\frac{rev(n)}{n} = \frac{qk}{2k} = \frac{q}{2}.$$

Таким образом, для каждого $n \in A_2$ существует нечетное q такое, что

$$2 \cdot rev(n) = qn. \quad (5)$$

Можно считать, что n и $rev(n)$ имеют одинаковую длину (число разрядов). Если бы число n оканчивалось на 0, то $n = 10t \Rightarrow rev(n) = rev(t)$.

При этом $n = 2k = 10t \Rightarrow k = 5t$. Подставляя найденные выражения в (4), получим $rev(t) = q \cdot 5t = (5q) \cdot t$, а это противоречит теореме 1, согласно которой уравнение (2) имеет только три решения: 1, 9 и 4. $5q$ не может быть равно ни одному из этих чисел.

Очевидно, $rev(n) < 9n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, так как минимальная первая цифра числа n - единица, максимальная последняя цифра - девятка и они меняются местами после преобразования $rev(n)$. Поэтому,

$$qn = 2 \cdot rev(n) < 2 \cdot 9n = 18n,$$

то есть $q < 18$. Учитывая, что q нечетное, находим все возможные значения для q : $q \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$. И нам нужно доказать, что уравнение (5) разрешимо только при $q = 3$ и $q = 9$ и исключить все другие случаи.

Рассмотрим случай $q = 1$. Уравнение (4) принимает вид: $2 \cdot rev(n) = n$. Предположим, что число n начинается на цифру a ($1 \leq a \leq 9$) и оканчивается на цифру b ($1 \leq b \leq 9$). Тогда $rev(n)$ будет начинаться на b и оканчиваться на a .

Последняя цифра $2 \cdot rev(n)$ равна $2a \bmod 10$, то есть

$$b \equiv 2a \pmod{10}. \quad (6)$$

Первая цифра $2 \cdot rev(n)$ равна $2b$ или $2b + 1$ (если был перенос единицы от предыдущего разряда). Поэтому, $a = 2b$ или $a = 2b + 1$.

Поставим в (6) найденные выражения для a : $b \equiv 4b \pmod{10} \Rightarrow 3b \equiv 0 \pmod{10}$ или $b \equiv 4b + 2 \pmod{10} \Rightarrow 3b + 2 \equiv 0 \pmod{10}$. Так как b - цифра от 1 до 9, то $3b$ не может делиться на 10, а $3b + 2$ делится на 10 только при $b = 6$. Но это противоречит равенствам $a = 2b$ или $a = 2b + 1$ из которых следует, что $b < 5$.

Рассмотрим случай $q = 5$. Уравнение (4) принимает вид: $2 \cdot rev(n) = 5n$. Уравнение (6) здесь будет иметь вид $5b \equiv 2a \pmod{10}$, а условие равенства первых цифр: $5a = 2b$ или $5a = 2b + 1$. Ограничения на a и b здесь усиливаются и проще доказать, что таких цифр a и b существовать не может.

Из первого равенства следует $(a, b) = (2, 5)$, а из второго $(a, b) \in \{(1, 2), (3, 7)\}$ и все они не удовлетворяют сравнению.

Аналогично доказывается отсутствие решений для остальных случаев $q = 7, 11, 13, 15, 17$.

Рассмотрим теперь случай $q = 9$. Уравнение (4) принимает вид: $2 \cdot rev(n) = 9n$. Число n делится на 2, положим $n = 2k$, тогда

$$rev(2k) = 9k$$

Анализируя это уравнения (умножение + индукция по k), приходим к выводу, что

$$\{k : rev(2k) = 9k\} = 9 \cdot P2$$

Таким образом,

$$A_{21} = 18 \cdot P2 = S_{18}$$

Рассмотрим последний случай $q = 3$. Уравнение (4) принимает вид: $2 \cdot rev(n) = 3n \Rightarrow \frac{rev(n)}{n} = \frac{3}{2}$.

Это реверсивно-устойчивая последовательность S_{4356} с коэффициентом реверсивной устойчивости $\frac{3}{2}$ из работы [1], то есть

$$A_{22} = S_{4356} = 396 \cdot P91.$$

Теорема доказана.

2. Общий случай $m > 2$.

Приведем предположительные структуры некоторых множеств A_m на основе вычислений их начальных элементов. Реверсивно-устойчивую последовательность будем обозначать $S(\frac{x}{y})$, где $\frac{x}{y}$ - ее коэффициент реверсивной устойчивости.

$$A_3 = S(\frac{8}{3}) \cup S(\frac{19}{3}) \cup S(\frac{14}{3}) \cup S(\frac{7}{3}) \cup S(\frac{2}{3}) \cup S(\frac{5}{3}),$$

где

$$S(8/3) = \{27, 297, 2727, 2997, 27027, 29997, 270027, 272727, 297297, \dots\}$$

$$S(19/3) = \{1107, 12177, 111807, 122877, 1108107, 1229877, \dots\}$$

$$S(14/3) = \{2079, 20979, 209979, 2099979, 20792079, 20999979, \dots\}$$

$$S(7/3) = \{3267, 32967, 329967, 3299967, 32673267, 32999967, \dots\}$$

$$S(2/3) = \{6534, 65934, 659934, 6599934, 65346534, 65999934, \dots\}$$

$$S(5/3) = \{560439, 5609439, 56099439, 560999439, 5609999439, \dots\}$$

$$A_4 = S(\frac{7}{4}) \cup S(\frac{1}{4}) \cup S(\frac{13}{4}) \cup S(\frac{9}{4}) \cup S(\frac{33}{4}),$$

где

$$\begin{aligned} S(7/4) &= \{12, 24, 36, 48, 132, 264, 396, 1212, 1332, 1452, \dots\} \\ S(1/4) &= \{8712, 87912, 879912, 8799912, 87128712, 87999912, \dots\} \\ S(13/4) &= \{21296, 214896, 212981296, 2129621296, 21296021296, \dots\} \\ S(9/4) &= \{36828, 3682836828, 36828036828, 368280036828, \dots\} \\ S(33/4) &= \{1070388, 1071340658388, \dots\} \end{aligned}$$

$$A_5 = S(\frac{17}{5}) \cup S(\frac{6}{5}) \cup S(\frac{2}{5}) \cup S(\frac{14}{5}) \cup S(\frac{3}{5}),$$

где

$$\begin{aligned} S(17/5) &= \{15, 165, 1515, 1665, 15015, 16665, 150015, 151515, \dots\} \\ S(6/5) &= \{45, 495, 4545, 4995, 45045, 49995, 450045, 454545, \dots\} \\ S(2/5) &= \{21780, 219780, 2199780, 21999780, 217821780, 219999780, \dots\} \\ S(14/5) &= \{201465, 2016465, 2032965, 20166465, 20347965, 201666465, \dots\} \\ S(3/5) &= \{934065, 9349065, 93499065, 934999065, 9349999065, \dots\} \end{aligned}$$

$$A_6 = S(\frac{5}{6}) \cup S(\frac{17}{6}) \cup S(\frac{47}{6}) \cup S(\frac{31}{6}) \cup S(\frac{1}{6}),$$

где

$$\begin{aligned} S(5/6) &= \{15, 165, 1515, 1665, 15015, 16665, 150015, 151515, \dots\} \\ S(17/6) &= \{45, 495, 4545, 4995, 45045, 49995, 450045, 454545, \dots\} \\ S(47/6) &= \{21780, 219780, 2199780, 21999780, 217821780, 219999780, \dots\} \\ S(31/6) &= \{201465, 2016465, 2032965, 20166465, 20347965, 201666465, \dots\} \\ S(1/6) &= \{934065, 9349065, 93499065, 934999065, 9349999065, \dots\} \end{aligned}$$

$$A_7 = S(\frac{4}{7}) \cup S(\frac{31}{7}) \cup S(\frac{13}{7}) \cup S(\frac{3}{7}) \cup S(\frac{22}{7}) \cup S(\frac{51}{7}) \cup S(\frac{43}{7}) \cup S(\frac{26}{7}),$$

где

$$\begin{aligned} S(4/7) &= \{21, 42, 63, 84, 231, 462, 693, 2121, 2331, 2541, 2751, \dots\} \\ S(31/7) &= \{1617, 17787, 1618617, 16171617, 161701617, 177887787, \dots\} \\ S(13/7) &= \{3927, 39273927, 392703927, 3927003927, 39270003927, \dots\} \\ S(3/7) &= \{7623, 76923, 769923, 7699923, 76237623, 76999923, \dots\} \\ S(22/7) &= \{22407, 246477, 22429407, 224092407, 2240722407, \dots\} \\ S(51/7) &= \{103257, 1041957, 10428957, 104298957, 10325803257, \dots\} \\ S(43/7) &= \{147609, 147609147609, 1476090147609, 14760900147609, \dots\} \\ S(26/7) &= \{246519, 246519246519, 246530586519, 2465190246519, \dots\} \end{aligned}$$

$$A_{18} = S\left(\frac{29}{18}\right) \cup S\left(\frac{19}{18}\right) \cup S\left(\frac{73}{18}\right),$$

где

$$S(29/18) = \{162, 1782, 16362, 17982, 162162, 179982, 1620162, \dots\}$$

$$S(19/18) = \{19602, 197802, 1979802, 19799802, 196039602, \dots\}$$

$$S(73/18) = \{1492506, 14938506, 149398506, 1493998506, \dots\}$$

Теорема 3. Для любого натурального m множество A_m равно объединению конечного числа реверсивно-устойчивых последовательностей:

$$A_m = \bigcup_{i=1}^r S(x_i/m),$$

где $x_i \in \mathbb{N}$, $\gcd(x_i, m) = 1$.

Доказательство. Пусть $n \in A_m$. Тогда, по определению A_m , $n = mk$ и $\gcd(mk, \text{rev}(mk)) = k$. Отсюда $\text{rev}(mk) = qk$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, причём $\gcd(q, m) = 1$. Следовательно,

$$\frac{\text{rev}(n)}{n} = \frac{q}{m} \tag{7}$$

Кроме того, так как $\text{rev}(n) < 10n$, то

$$1 \leq q < 10m.$$

Для данного m и каждого фиксированного q уравнение (7) задает реверсивно-устойчивую последовательность $S(q/m)$ с коэффициентом реверсивной устойчивости q/m . Для каждого m число таких последовательностей конечно, так как $q < 10m$.

Теорема доказана.

Каждое из приведенных выше, а также любых других представлений A_m в виде объединения конечного числа реверсивно-устойчивых последовательностей может быть строго доказано таким же способом, каким в теореме 2 было доказано подобное представление для A_2 .

Ссылки

- [1] Гуляев Георгий Михайлович Двоичные палиндромы и реверсивно-устойчивые последовательности // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134223>.
- [2] R. Webster and G. Williams, On the Trail of Reverse Divisors: 1089 and All that Follow, Mathematical Spectrum, 45 (2012/2013), 96–102.
- [3] <https://oeis.org/A008918>
- [4] Sloane, N. J. A. 2178 and all that [Электронный ресурс] / N. J. A. Sloane // The Fibonacci Quarterly. — 2014. — Vol. 52, no. 2. — P. 99–105. — <https://www.fq.math.ca/Papers1/52-2/Sloan10242013.pdf>